



Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

Difficulties in Mathematics, an Experience Judged

Anna Paola Longo

L'articolo riflette sul recupero delle difficoltà in matematica, proponendo un approccio centrato sull'indagine del processo di apprendimento dell'allievo più che sulla semplice correzione dell'errore. Attraverso due concrete esperienze svolte in un doposcuola con studenti della scuola secondaria, si evidenzia l'importanza della personalizzazione dell'intervento. Il ruolo dell'insegnante deve essere quello di guida attenta e partecipe, capace di sostenere lo studente nel superamento degli ostacoli, anche profondi, che ostacolano l'apprendimento.

Parole chiave

Didattica della matematica; difficoltà di apprendimento; errore; ostacolo; dopo scuola.

The article reflects on overcoming difficulties in mathematics, proposing an approach focused on investigating the student's learning process rather than simply correcting errors. Through two concrete experiences carried out in an after-school program with secondary school students, the importance of personalizing the intervention is highlighted. The role of the teacher must be that of an attentive and involved guide, capable of supporting the student in overcoming obstacles, even profound ones, that hinder learning.

Keywords

Mathematics education; learning difficulties; errors; obstacles; after school programs.

✉ Corresponding author: anpalongo@gmail.com



Introduzione

Sono una ex insegnante di analisi matematica del Politecnico di Torino, ora in pensione. Negli anni in cui lavoravo, ho partecipato attivamente ad un gruppo di ricerca interuniversitario sulle difficoltà in matematica. Abbiamo fatto molte esperienze e radunato un buon numero di insegnanti di ogni tipo di scuola, sia primaria che secondaria. Le nostre esperienze sono state raccontate in convegni nazionali in cui convergevano sia insegnanti di matematica che ricercatori universitari, sono state pubblicate nella collana *Matematica e difficoltà* dalla casa editrice Pitagora di Bologna. Cosa si può fare quando un allievo appare in difficoltà in matematica? L'intervento tradizionale era la segnalazione all'allievo degli errori da parte dell'insegnante, il quale di solito si limitava alla correzione del compito, lasciando all'allievo ed a chi poteva aiutarlo a casa la responsabilità di affrontare il recupero. Talvolta l'aiuto era la ripetizione della spiegazione, modalità che non si rivelava sempre idonea al recupero. Il cambiamento dei tempi ha condotto gli insegnanti a farsi carico dentro la scuola del recupero delle difficoltà. La ricerca ha prodotto risultati interessanti, oltre alle esperienze di recupero operate dai nostri gruppi di ricerca su matematica e difficoltà. I risultati provengono sia dalla ricerca in atto, cioè dalle esperienze nelle scuole, sia dalla ricerca teorica degli specialisti, medici e docenti. È nata proprio nella ricerca teorica l'idea di *ostacolo*. Infatti, gli errori non sono tutti dello stesso tipo, alcuni dipendono dalla distrazione o da un difetto di comprensione, talvolta non riconosciuto né dall'allievo né dal docente, di qualche punto specifico della disciplina. Alcuni errori sono facili da correggere ed eliminare, basta segnalarli all'allievo aggiungendo qualche spiegazione, altri continuano a ripetersi nonostante la correzione e nonostante la ripresa dell'argomento da parte dell'insegnante, rivelando in questo modo radici profonde. Questi errori sono stati chiamati *ostacoli* in quanto sembrano opporsi come veri ostacoli all'apprendimento. Nella ricerca didattica in matematica, si chiama *ostacolo* un errore che resiste alla correzione¹. Secondo l'origine dell'errore, si distinguono ostacoli ontologici, epistemologici e didattici. La teoria degli ostacoli è recente, ha avuto origine nell'opera del filosofo Gaston Bachelard ed è stata ripresa dal matematico Guy Brousseau, riconosciuto come padre della attuale Didattica della matematica. Alcuni esempi di ostacoli sono riportati nel contributo di Maier *Il conflitto tra la lingua matematica e la lingua quotidiana per gli allievi*². A questo tipo di errore è dedicato un capitolo del libro *La Matematica e l'esperienza*³, a cui rimando per approfondire. È chiaro che il successo del recupero non è mai garantito in partenza e che nei casi più difficili lo scopo, non immediato, è riattivare un processo di apprendimento interrotto o confuso. L'insegnante per fare qualche passo in questa direzione ha bisogno di far emergere non solo il risultato finale dell'apprendimento, statico, come in una foto o come su un'immagine, ma deve cercare di conoscere *il processo* che è avvenuto nella mente dello studente nel tempo dedicato ad apprendere, confrontandolo con quello teorico che avrebbe dovuto prodursi. Lo scopo è intervenire sulla consapevolezza dell'allievo, cioè sulla sua comprensione del proprio lavoro. L'insegnante, quindi, deve svolgere di fronte ad un errore una vera indagine sul cammino dello studente verso la conoscenza e il suo lavoro si modella ogni volta come un'indagine, attraverso il colloquio orale o scritto con l'allievo. Si tratta di una capacità legata sia al sapere dell'insegnante che alla sua esperienza. Certamente il sapere non può essere solo matematico, ma almeno in modo embrionale deve essere anche epistemologico e pedagogico. Intendo dire che l'insegnante è aiutato dal conoscere non solo alcuni risultati della sua disciplina, ma anche i processi con cui possono formarsi nella mente e dal conoscere i rudimenti dell'arte di insegnare. Questo articolo ha la funzione di chiarire con due esempi la modalità dell'indagine a cui mi sono riferita. Racconterò infatti il lavoro svolto con due ragazzi di scuola secondaria di primo grado che ho incontrato quest'anno in un doposcuola torinese. Le loro difficoltà riguardano i contenuti matematici, ma toccano anche questioni che riguardano il loro modo di studiare e la loro comprensione del linguaggio matematico. Racconterò il mio lavoro mettendo in evidenza fattori generali che possano servire come ipotesi di lavoro agli insegnanti di qualsiasi tipo di scuola, dalla primaria alla scuola superiore.

Presento il mio lavoro

Si è svolto in un doposcuola della mia città, frequentato da ragazzi di scuola secondaria di primo grado. Gli iscritti sono una decina, gli adulti seguono i ragazzi nei compiti e possibilmente li aiutano nel recupero delle loro difficoltà nello studio. Il doposcuola si svolge due pomeriggi alla settimana e ogni volta dura due ore, con un breve intervallo dedicato alla merenda. I ragazzi vengono per fare i compiti, ciascuno di loro è seguito da due

¹ A.P. Longo – A. Gorini, *La matematica e l'esperienza*, Marcianum Press, Venezia 2023, pp. 68 ss.

² H. Maier, *Il conflitto tra la lingua matematica e la lingua quotidiana per gli allievi*, «La matematica e la sua didattica», 3 (1995), pp. 292-305.

³ A.P. Longo – A. Gorini, *La matematica e l'esperienza*, cit.

Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

diversi insegnanti, a seconda delle materie di studio, uno prima e uno dopo l'intervallo. Quando sbagliano vengono corretti, il contenuto del lavoro è quello fissato a scuola dai loro professori. Gli insegnanti di questo doposcuola non hanno alunni fissi, ma si alternano tra tutti i ragazzi a seconda delle materie su cui loro devono fare i compiti. Il clima di lavoro è sereno, per noi adulti l'unico scopo è che tutti imparino qualcosa e che migliorino la loro situazione scolastica.

Presento nei dettagli il lavoro fatto con due ragazzi, perché sono certa che le questioni affrontate per l'educazione al metodo di studio e per il recupero di difficoltà non riguardano solo la scuola secondaria di primo grado, ma mi permettono di fare riflessioni utili anche per quella di secondo grado. Ciascuno dei due allievi ha difficoltà sue proprie, come in ogni caso di difficoltà. Concluderò con un giudizio complessivo sul lavoro del doposcuola, con lo scopo di offrire riflessioni generali utilizzabili in ogni tipo e ordine di scuola per un lavoro scolastico di recupero.

Prima esperienza

A. è l'unica ragazza del doposcuola, all'inizio era solitaria, ma presto ha familiarizzato con i compagni, favorita dal fatto di conoscere già S., suo compagno di classe. Frequenta la seconda, viene regolarmente al doposcuola. Nei miei incontri con lei ho cercato di comprendere la sua posizione di fronte alla scuola ed alle discipline scolastiche.

4 febbraio 2025

Oggi A. deve fare per domani un compito di matematica sul teorema di Pitagora. Come inizio del lavoro, le chiedo di enunciare il teorema, ma lei afferma con impeto che non serve perché il compito non è su quell'argomento. Mi meraviglio, immagino che sia stata tratta in inganno da una lettura superficiale degli esercizi. Rispondo che non mi sembra possibile perché ha aperto il testo su una pagina che ha come titolo proprio quel teorema. Lei mi indica l'esercizio che deve fare, io leggo il testo e le assicuro che c'entra con il teorema di Pitagora. Lei allora lo enuncia, ma parla così veloce che non capisco le parole e per verificare quello che sa le chiedo di scriverlo. Lei inizia a scrivere l'enunciato esprimendosi nella lingua italiana, senza usare le lettere per rappresentare i lati di un triangolo. La interrompo perché davvero non capisco e la prego di usare la lingua della matematica. A questo punto non ha più l'aria sicura di sé, comincia a dire parole che riguardano il teorema, ma non sa organizzarle in un enunciato, cioè in una frase dotata di senso logico. È precipitata nell'ansia e questa situazione va avanti per tutto il tempo in cui lavoriamo. Intervengo più volte sull'enunciato del teorema, ma lei non mi lascia finire, mi interrompe dicendo: «sì, sì, è così». Sembra più rilassata, più serena, ma non riprende mai il mio discorso per portarlo a termine. Ha ascoltato da me alcune parole note, ma penso che non ne abbia capito il significato perché in questo caso mi avrebbe lasciato finire. Le chiedo di disegnare un triangolo rettangolo e di dare un nome ai suoi lati, comprende e scrive delle lettere, alcune minuscole e altre maiuscole, la correggo dando le ragioni dell'uso dei simboli, poi scrivo accanto alla figura, l'enunciato del teorema nella forma consueta: $a^2 + b^2 = c^2$.

Passiamo poi al compito. Nei primi due esercizi, dato un triangolo rettangolo, si danno le misure dei cateti e si chiede la misura dell'ipotenusa.

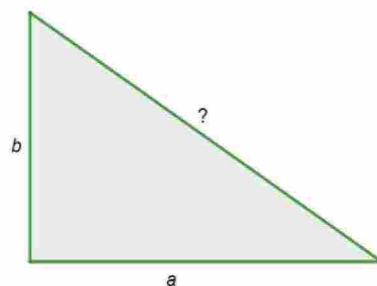


Figura 1

Nuova Secondaria n. 1 - Studi umanistici, scientifici, tecnologici, linguistici

Lei riprende l'uguaglianza precedente sostituendo i valori assegnati ai cateti e calcolandone i quadrati e poi la loro somma, quindi si ferma, ottenendo il valore di c^2 . Non termina l'esercizio perché non calcola la lunghezza dell'ipotenusa. Ho l'impressione che non dimostri autocontrollo, forse per il suo carattere impetuoso. Il fatto che io dica che manca qualcosa non l'aiuta a correggersi! Solo quando le chiedo se ha davvero trovato la lunghezza dell'ipotenusa, si accorge di avere solo il quadrato e non la lunghezza di un segmento, come era richiesto dall'esercizio. Allora si ferma, ma non sa cosa fare. Sono stupita! Le chiedo quale sia l'operazione che permette di trovare un numero, di cui conosciamo il quadrato. Sa che occorre eseguire la radice quadrata, ma non sa come si calcola e non sa cosa fare. Le chiedo se vuole usare il mio telefono e allora trova senza problemi sul telefono la radice quadrata del numero, quindi risolve in breve l'esercizio.

Ma ora viene il bello! Nell'esercizio seguente sono date le misure di un cateto e dell'ipotenusa e si chiede la misura dell'altro cateto.

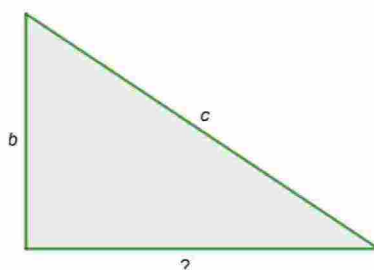


Figura 2

Mi illudo che per lei sia facile risolverlo perché può usare di nuovo la stessa formula $a^2 + b^2 = c^2$ e invece non sa cosa fare e butta fuori parole a caso: divido per questo, moltiplico per quest'altro, ecc. La difficoltà, per me inattesa, è che per lei nel primo esercizio erano noti entrambi i termini del primo membro, mentre ora sono assegnati un termine del primo membro e un termine del secondo membro. Capisco che non ha in mente le regole del calcolo e cado anche io nel panico! Non posso spiegarle tutto l'argomento del calcolo, non abbiamo tempo, devo decidere come intervenire: dirle come si trasporta un numero da un membro all'altro di una equazione o farglielo ricavare. Se fossi la sua vera insegnante, penserei ad un recupero dei fondamenti dell'algebra, ma in questo momento mi sento disarmata! Penso che, se in un breve ripasso del calcolo non riuscisse a capirne le ragioni, non potrebbe ricordare il procedimento perché in matematica la memoria non regge senza aver capito; quindi, non credo che sia utile solo ricordarle come si deve fare. Tento di spiegare in modo rapido e scopro altre lacune. Lascio da parte Pitagora e punto alla risoluzione di una equazione, ma nascono nuovi problemi. Enuncio: «se nella nostra equazione sottraggo 2 ad entrambi i membri, ottengo: $-2 + 2 + x = 5 - 2$ ». Ma si presenta una nuova difficoltà perché io mi aspetto che riconosca che $-2 + 2$ coincide con $2 - 2$ e quindi che segue $0 + x = 3$ e ancora $x = 3$, ma questo non avviene. Non indago, il tempo sta per finire e bisogna finire il compito, lei ha fretta ed anche io con lei! Allora la correggo in modo meccanico, dico come si trasporta un termine da un membro all'altro di un'equazione e così con qualche calcolo finiamo il compito. Ma abbiamo toccato un punto cruciale, le difficoltà che nascono da uno studio troppo mnemonico. La memoria in matematica ha bisogno di fondamenta che, a mio avviso, sono nel capire il significato e ricordarlo. In me emerge la grande domanda, cosa avrà imparato oggi A.? Io ho scoperto in lei una mancanza di ragioni nell'uso dell'algebra.

Per fortuna, dopo l'intervallo, facciamo ancora insieme il compito di italiano, una lunga lettura e un breve riassunto. Qui A. accetta con semplicità le mie correzioni. Come mai reagisce in modo diverso da prima? Perché qui non si oppone a me quasi come una vittima? Forse qui sa di più, comprende ed accetta, mentre in matematica sa di meno, non capisce e non accetta. Si fida di una memoria meccanica che in matematica la tradisce.

Dopo una settimana

Oggi abbiamo con noi un'amica, Simona, docente di lettere, anche lei in pensione. Oggi è libera e viene a seguire il nostro lavoro. Io spero che A. abbia fatto sue le conquiste del lavoro della settimana scorsa e le chiedo

Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

di nuovo di enunciare il Teorema di Pitagora. Anche questa volta va velocissima e io la blocco chiedendo per favore di scrivere invece di parlare e comincia una via dolorosa. Mi sembra di essere di nuovo al punto di partenza, deduco che forse le manca quel terreno di conoscenza e di serenità che le avrebbe permesso di afferrare e ricordare il lavoro che avevamo fatto. Devo dunque indagare sulle sue conoscenze remote. Ripetiamo il lavoro sui punti già affrontati nella settimana precedente ed alla fine lei dice con sicurezza: «in un triangolo rettangolo la somma dei quadrati dei cateti è uguale all'ipotenusa». Le faccio notare che non è possibile una uguaglianza in cui da una parte ci sia la somma di due quadrati e dall'altra ci sia un termine lineare! Vedo che questa osservazione non l'aiuta e sinceramente mi chiedo come mai non lo riconosca. Non ha mai visto l'analisi delle dimensioni, che a me sembra necessaria. Mentre torno a casa, ripenso a questa esperienza e mi viene in mente che in geometria siamo lontani dall'algebra, i numeri sono meno astratti perché hanno una dimensione: lunghezza, area, volume sono le dimensioni della geometria. Forse a scuola nessuno ne parla. Forse si tratta la geometria solo come spunto per fare altra aritmetica.

A casa ne parlo con mio marito, che ha già fatto parecchie esperienze di doposcuola. Lui mi prepara un triangolo rettangolo di lati 3 e 4 quadretti, la cui ipotenusa è lunga 5 quadretti, abbiamo una tema detta *pitagorica*: $3^2 + 4^2 = 5^2$, infatti $9 + 16 = 25$. Gli egiziani sapevano che un triangolo di lati 3,4,5 è un triangolo rettangolo e lo usavano per riconoscere un angolo retto. Per costruirlo usavano una corda con 12 nodi equidistanti. Infatti, $3+4+5=12$ e costruendo un triangolo con quei lati e con perimetro 12 si ottiene un triangolo rettangolo. Questo non lo dirò ad A., ma con le mie figurine sono pronta per incontrarla di nuovo.

A. mi ha fatto una domanda, può essere buon segno della sua adesione al lavoro che le propongo. Vedremo la prossima volta.

Una settimana dopo. Oggi A. non ha compiti di matematica. Quindi non lavoriamo insieme, e io non potrò usare le mie figurine, un triangolo rettangolo e tanti quadratini. Alla fine delle 2 ore consegno ad A. la busta con le figurine ritagliate e le spiego un compito da fare a casa: usa il triangolo rettangolo di cateti $3u$ e $4u$ e i quadratini di lato u per far vedere come funziona il teorema di Pitagora. Le brillano gli occhi, sembra contenta. Ma è contenta del compito che le ho assegnato o solo del fatto che mi sono occupata di lei?

Quarto incontro. Sorpresa, non ha fatto il compito che le avevo proposto! Allora prendo il triangolo rettangolo e i quadratini che avevo preparato e le chiedo di rappresentare il teorema di Pitagora con questo materiale. Faccio una scoperta! A. mette una fila di quadratini su ciascun cateto ed alla fine infila anche un quadratino nello spazio che rimane vuoto, cioè un quadratino che ha un vertice su un vertice del triangolo, quindi un solo punto in comune e non un lato.

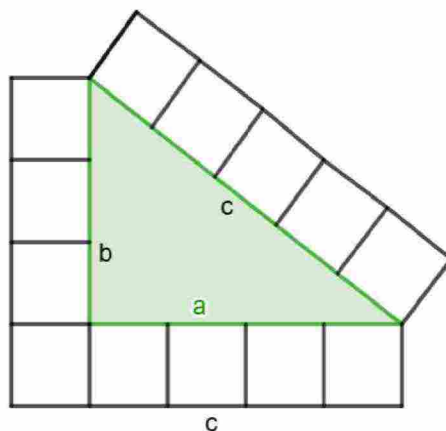


Figura 3



Nuova Secondaria n. 1 - Studi umanistici, scientifici, tecnologici, linguistici

A. ha orlato il triangolo e non ha iniziato a costruire i quadrati sui cateti. La sua azione non è guidata da un'idea. Quando le dico che non va bene, lei non cambia niente. La mia richiesta non ha dato il frutto che attendevo introducendo un materiale concreto. L'enunciato del teorema, che ormai aveva imparato, non le ha indicato la strada per costruire una figura adeguata, siamo ancora molto vicini al punto di partenza! La ripetizione del testo del teorema non l'aiuta a immaginare i quadrati da costruire. Credo che le cause possano essere molte, probabilmente non è chiaro che un vertice in geometria è un punto senza dimensioni, che ha un legame con il lato del quadrato, ma non è esso stesso un segmento. Sono definizioni astratte. Sospendo il lavoro. Io e Simona chiacchieriamo con A., che si dimostra serena e soddisfatta del lavoro che abbiamo fatto insieme. A me risulta più chiaro che una componente importante della sua situazione cognitiva è l'ansia, che lei stessa sa di provare e che forse le fa apprezzare il nostro atteggiamento amichevole.

Seconda esperienza

28 gennaio 2025. Oggi mi colpisce subito il carattere impetuoso del ragazzo con cui devo lavorare, S., classe seconda, compagno di classe di A., un ragazzo con un vocione profondo, sempre pronto a ridere e fare confusione. All'inizio del doposcuola di oggi, invece di occuparsi subito del compito, S. comincia a telefonare senza spiegarmi il motivo e solo con le parole non riesco a fermarlo. La collega che dirige il doposcuola interviene facendosi consegnare il suo telefono. Ha ragione! Ora possiamo iniziare a guardare il suo compito sul libro di testo e lui, con la sua abitudine a produrre caos, comincia a protestare su quanto abbiamo letto. Infatti sul suo libro si parla di a^2 , quadrato di un numero a , e lui dice con fare deciso che non può conoscere il significato di quel simbolo che non ha mai visto! Questo significa solo che non segue il lavoro che si fa in classe! non lo dico, ma non gli dico neanche il significato che vorrebbe sapere, perché voglio indicargli come si cerca un argomento sul testo. Con questo scopo gli chiedo di rintracciare sull'indice del libro il capitolo dove si trova l'argomento in questione. Mi guarda come se io fossi un extraterrestre! E io ribadisco: «sì, tranquillo, comincia a trovare l'indice del libro!». Lui trova l'indice, ma non si orienta nella ricerca del contenuto, perciò suggerisco: «guarda, in questo capitolo c'è quello che cerchiamo, le potenze». Siamo approdati alla pagina giusta, dove possiamo trovare i significati dei simboli delle potenze, la leggiamo interpretandola e facendo esempi, poi torniamo al nostro compito e gli chiedo come si trasforma, secondo quello che abbiamo imparato, la scrittura dei prodotti $2*2$, poi $5*5$, poi $20*20$, poi, alla fine, $a*a$. Lui scrive bene i quadrati e intanto continua a parlare sull'esercizio, ma vista la confusione delle sue parole, lo interrompo chiedendogli di esprimersi nella lingua della matematica invece di quella comune. Lui allora torna ai simboli. Riprendiamo il libro, apriamo la pagina del teorema di Pitagora e decifriamo il testo, riconoscendo che a^2 è l'area del quadrato di lato a , arriviamo ad enunciare il teorema con la consapevolezza dei termini: «in un triangolo rettangolo la misura dell'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle misure delle aree dei quadrati costruiti sui due cateti».

Dopo aver letto e compreso gli esempi del libro, torniamo ai suoi esercizi. All'inizio manifesta problemi nella scrittura, sembra quasi che scriva simboli a casaccio, ma presto riconosco che vuole ricostruire i simboli visti a scuola, che però in quel momento scrive senza logica, come se fossero pezzetti di carta incollati uno dietro l'altro. Io allora ho cominciato a ricordare, parlando ad alta voce, quello che avevamo già visto e lui scrive ascoltandomi. Impostato il problema, ha bisogno di trovare la base di alcuni quadrati, cioè di fare la radice quadrata di alcuni numeri. Siccome ha imparato a farla servendosi del telefono, lo prego di andare a chiedere il suo alla mia collega per terminare i calcoli. Così abbiamo finito il compito, il telefono è servito a qualcosa di utile e non solo a produrre caos, come lo usava lui spontaneamente all'inizio, senza riguardo al motivo per cui eravamo in quel luogo.

Considerazioni. In questo secondo lavoro, abbiamo considerato l'enunciato del teorema di Pitagora come un dato, senza nessun tentativo di dimostrazione, ma abbiamo fatto solo alcune verifiche seguendo il metodo del libro di testo. Se riesco a lavorare ancora con lui, cosa non scontata, voglio insistere sulla domanda: «perché basta sapere che il triangolo è rettangolo per essere sicuri della verità della relazione espressa dal teorema di Pitagora?». Ritornando col pensiero su questa esperienza, ricordo che mi ha colpito all'inizio del lavoro che S. ad un certo punto abbia cambiato aspetto, non rideva più, era serio e concentrato e lo guardavo meravigliata. Ora, finito il lavoro, mi chiedo cosa lo abbia calmato permettendogli di aderire allo studio in modo personale. Certamente è stato davvero utile che la collega gli abbia sequestrato il telefono, cosa che io abituata ai miei alunni più maturi del Politecnico, non avevo pensato di fare. Osservo poi che la scintilla che lo ha messo in moto è stata la mia domanda: «Cerca sul libro ciò che ti serve per fare questo compito». Questa semplice domanda è riuscita a fissare uno scopo preciso alla sua attività, indirizzandolo a sostituire un lavoro alla sua agitazione chiassosa. Il fatto che lui sia riuscito a calmarsi ed a

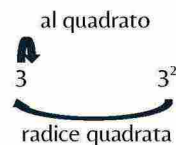
Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

cominciare a pensare al compito mi sembra dimostrare il suo interesse, anche se minimo, alla scuola. Ora avrei bisogno di verificare se questo suo inizio di lavoro personale ha lasciato in lui una traccia, non solo sulla scrittura delle potenze e sul teorema di Pitagora, ma soprattutto riguardo al metodo nel lavoro: «posso cercare sul testo e sugli appunti quello che mi serve per capire come fare il compito». Vorrei lavorare ancora con lui per rendere stabile l'idea di questa ricerca sul libro e sul quaderno degli strumenti che servono per fare i compiti. Vorrei anche fare un passo verso la comprensione, guidandolo a scoprire che non c'è solo la possibilità di fidarsi dell'autore del libro, ma che si può verificare personalmente la verità dei *teoremi*, o nella forma generale o in un caso particolare. Ma nelle due settimane seguenti S. non viene, si giustifica.

25 marzo 2025. È passato molto tempo dal primo incontro con S., non posso verificare se ha imparato il teorema di Pitagora perché oggi abbiamo altro da fare! Infatti, S. domani ha una prova scritta sulle radici quadrate, e devo attenermi alla sua necessità. Guardo il suo libro e il suo quaderno per comprendere il loro lavoro. Anche in questo secondo momento di lavoro osservo che S. si orienta con fatica nelle pagine del testo, che non gli è familiare e fa fatica anche ad orientarsi sui fogli del suo quaderno, molto scarni. Per capire gli esercizi, ha bisogno di imparare la definizione di radice quadrata ed ho iniziato da questo punto il ripasso, o meglio la lezione/studio, osservando attentamente la sua reazione alle mie parole. Introduco brevemente la definizione di radice quadrata di un numero positivo e mi sembra che capisca il mio discorso, poi dopo qualche minuto provo a verificare quanto ricorda e decido di passare alle applicazioni.

Il primo esercizio che trovo sul suo quaderno inizia con la scomposizione in fattori di un numero contenente le migliaia. Non descrivo il procedimento che ha imparato a scuola per scomporre il numero in fattori, ma sintetizzo il risultato su un esempio: $1.764 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$, e $\sqrt{1764} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2}$.

Dopo questo primo lavoro, S. non sa procedere nel calcolo, quindi capisco di dover riprendere il lavoro sul simbolo di radice risalendo con più precisione al suo significato come operazione inversa di una potenza, soprattutto facendo esempi semplici di radici di un quadrato perfetto: radice di $9 = \sqrt{3^2} = 3$ (per definizione di radice) e così $\sqrt{16}$, $\sqrt{25}$, $\sqrt{64}$, rimanendo nell'ambito delle tabelline. Cerco di chiarire sugli esempi che il quadrato e la radice sono due *cammini*, uno inverso dell'altro, ma tra loro collegati:



Dopo alcuni esempi, quando sembra che ormai la definizione sia diventata chiara, torniamo al numero fissato nel compito e gli chiedo a cosa può servire la scomposizione del numero in fattori, come aveva fatto a scuola. Naturalmente, lui non sa rispondere! Preferisco non spiegare ancora, ma insegnargli ad usare il testo; quindi, sfogliando il libro mi fermo sulla pagina delle proprietà della radice, in cui abbiamo letto tre proprietà, la radice di un prodotto, la radice di un quoziente, la radice di una frazione, enunciate con esempi:

$$\sqrt{(100 \cdot 4)} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{4} = 10 \cdot 2 = 20 \text{ (radice di un prodotto)}$$

$$\sqrt{(81:64)} = \sqrt{81} : \sqrt{64} = 9 : 8 \text{ (radice di un quoziente)}$$

$$\sqrt{81}/\sqrt{25} = 9/5 \text{ (radice di una frazione)}$$

Insieme, abbiamo tradotto queste relazioni in parole della lingua italiana. Alla fine, non ero convinta che si fosse impadronito del linguaggio, ma non avevo altro modo di verificare se non tornare ai calcoli:

$$\sqrt{1764} = \sqrt{(2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2)} \text{ e lui continua subito: } = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{7^2}.$$

Ha già imparato? Sarebbe una meraviglia. Gli chiedo come mai e non sa rispondere! Ma questo non vuol dire che non abbia capito perché è difficile imparare ad esprimersi nel linguaggio della matematica! ma imparare il linguaggio fa parte dell'imparare questa disciplina. Torno allora alla definizione, da lui già accettata in casi semplici, e successivamente torniamo all'esercizio confrontandolo con l'elenco delle proprietà. E riusciamo a concludere.



Nuova Secondaria n. 1 - Studi umanistici, scientifici, tecnologici, linguistici

S. mi dice che il suo insegnante non accetta che loro guardino il telefono o le tavole, allora facciamo un esercizio per la memoria elencando i numeri naturali fino a venti ed i loro quadrati. Concludo il ripasso facendogli riconoscere il significato geometrico delle coppie di numeri che abbiamo costruito, tutte del tipo (n, n^2) : passiamo dalla lunghezza di un segmento all'area del quadrato che ha come lato quel segmento. Partiamo dal quadrato di lato 4 cm e cerchiamo il significato di 16 cm^2 , poi un altro caso, lato 9 cm e area 81 cm^2 . Accompagniamo il discorso con il disegno per visualizzare il passaggio dal segmento all'area.

S., come la prima volta, non ha seguito il lavoro in classe e bisogna rispiegarli tutto, ma mi segue abbastanza e con lui si lavora. Mi manca la possibilità di verificare quanto si ricorderà del lavoro fatto oggi, ma confido che abbia capito perché per fortuna quando non capisce lo dice.

Osservando sul quaderno il lavoro fatto in classe, mi stupisce, come è avvenuto già tante altre volte, la mancanza di collegamento tra la parte algebrica dell'argomento e il riscontro geometrico! Penso che esista una consolidata abitudine scolastica a privilegiare l'algebra, che io non condivido, ma è chiaro che da sola non posso incidere sulle abitudini scolastiche.

Conclusione

La domanda essenziale suggerita dal lavoro fatto con A. e con S., due ragazzi con alcune difficoltà, mi sembra sia la possibilità di insegnare a studiare, cioè non solo esigerlo, come fanno tutti i bravi insegnanti, vecchi o giovani che siano, ma insegnarlo, che non è la stessa cosa! Per studiare occorre certamente un po' di buona volontà, ma occorre anche un metodo di lavoro, che non è identico in tutte le materie, anche se tra le varie discipline ha molti aspetti in comune. Lavorando con entrambi i ragazzi, le mie domande sono servite ad avvicinarli ad un metodo di lavoro, che potrebbe essere riassunto così: individua l'argomento da imparare, leggi quello che trovi sul testo e sul quaderno, riconosci se linguaggio e contenuti precedenti (prerequisiti) ti sono noti, in caso di necessità serviti dell'indice del testo, segnati su un foglio le cose da ricordare, leggi con attenzione le definizioni e le proprietà, prova a fare un esercizio senza mai procedere per intuizione ma ricercando le regole per ogni passaggio, verifica se hai imparato la lezione di oggi.

In un primo momento, esaminando i loro risultati scolastici, le due esperienze possono apparire simili perché A. ed S. hanno entrambi difficoltà a scuola, ma lavorando con loro ho scoperto che le loro difficoltà sono diverse. Mi sembra che quello che può trarre in inganno l'insegnante sia una istintiva valutazione che tende a considerare l'errore come una netta mancanza di intelligenza o di capacità di studiare. Invece ripensando alle esperienze che ho vissuto con questi due ragazzi ed alle altre numerose che ho vissuto con i miei allievi, il mio giudizio è che gli errori e le difficoltà non vogliano affatto dire *a priori* che quei ragazzi presentino un deficit di intelligenza. Infatti, insegnando al Politecnico, ho capito che i frutti del lavoro scolastico non dipendono solo dall'intelligenza, ma anche dall'applicazione costante, volenterosa, e dal metodo di studio. Per esempio, osservando A. mentre gioca con i compagni, vedo in lei tanta dinamica, tanto buon umore, è socievole come S. e credo fermamente che la sua difficoltà sul teorema di Pitagora non la definisca! Analogamente credo che la confusione prodotta da S. e la sua disattenzione a scuola non lo condannino necessariamente per sempre a non imparare.

Credo però che sia loro due che tanti altri non ce la facciano facilmente da soli ad affrontare la fatica di cambiare e di mettersi a studiare e che perciò vadano accompagnati da adulti, insegnanti o familiari, attenti a provocare il loro interesse senza sostituirsi a loro. Penso ad adulti consapevoli che, fiduciosi sulle possibilità dei ragazzi, si facciano carico per ciascuno di lavorare sulle difficoltà particolari, che hanno origine sia nel campo cognitivo che nell'affettività. Questo giudizio non è facile e per darlo non basta il buon senso, ma occorre anche qualche minima conoscenza o intuizione sullo sviluppo della persona e della conoscenza e va certamente approfondita parlando con qualcuno che identifichiamo come fonte di informazioni utili.

Prendendo esempio dalle due esperienze che ho illustrato, sottolineo che quanto ho affermato non è un alibi, perché mentre si portano dietro il proprio limite, sia A. che S. crescono e sarebbe per loro un grave danno se il loro apprendimento dovesse fermarsi. Correrrebbero il rischio di bloccarsi e di ritrovarsi in classi dove sarebbero molto più grandi degli altri. Questa situazione probabilmente non li faciliterebbe. Il recupero di A. potrebbe sembrare più facile di quello di S. perché lei è più tranquilla, più operosa, ma sarebbe un'illusione pensare che sia facile lavorare con lei. Ha lacune in matematica con radici profonde, che potrebbero conformarsi come ostacoli, e forse per questo motivo fatica ad apprendere cose nuove. Inoltre, si è abituata a controllare tutto quello che la circonda e le si chiede, tentando di opporre giudizio e volontà alle proposte dell'insegnante.



Difficoltà in matematica, una esperienza giudicata

Il loro recupero, come quello di altri ragazzi in difficoltà, può essere fatto nella loro scuola con un lavoro analogo al mio lavoro nel doposcuola, purché condotto con attenzione alla loro storia personale e con libertà rispetto ai giudizi ed alle abitudini scolastiche riguardanti la valutazione. È chiaro che una volta identificata la difficoltà, si potrebbe continuare a dare giudizi negativi se non si attendesse per fare la valutazione, l'esito positivo del recupero o almeno un tempo adeguato. L'analogia a cui penso con il mio lavoro riguarda non solo i contenuti, ma anche un'altra condizione importante, la personalizzazione del lavoro. A mio avviso, un insegnante segue la classe se segue ciascun alunno e non viceversa. È difficile, ma bisogna tentare ed escogitare modi per farlo. Naturalmente ci sono, per fortuna, molti alunni a cui basta un controllo veloce. La questione è in quale lavoro si impegna la classe mentre ci si dedica a quelli che hanno più bisogno di essere seguiti.

È interessante ciò che scrive G. Israel nella introduzione ad un testo di L. Lombardo Radice riguardo alle attività scolastiche: «L'idea che la pedagogia e le metodologie didattiche debbano avere un ruolo nella formazione dell'insegnante si è rovesciata nell'affermazione del loro assoluto primato, anche nei confronti dei contenuti disciplinari specifici»⁴. E scrive ancora L. Lombardo Radice nel lontano 1965 nel suo *L'educazione della mente*: «L'introduzione dei metodi attivi nell'educazione della mente è stata, ed è, un fatto rivoluzionario di importanza fondamentale. Il nuovo punto di vista credo si possa riassumere in una frase molto semplice: il ragazzo a scuola deve capire, e per capire deve studiare in modo attivo, ricostruendo in modo creativo ogni processo mentale, ogni esperimento, ogni vicenda, ogni teoria che gli vengono esposti. La passività intellettuale non genera conoscenze, ma imprime labilmente nozioni»⁵.

Diverso da quanto propongo sarebbe operare un recupero nel caso di deficit accertati dell'intelligenza o di handicap fisici. In questi casi occorrono all'insegnante competenze specifiche. Chi fosse interessato al recupero di difficoltà scolastiche in matematica può consultare pubblicazioni specifiche, come gli Atti dei convegni su Matematica e difficoltà pubblicati dalle edizioni Pitagora di Bologna e per le questioni generali sul metodo di studio i libri del prof. Rosario Mazzeo, indicati su Internet.

Anna Paola Longo,
Politecnico di Torino

⁴ G. Israel, *Introduzione al testo*, in L. Lombardo Radice, *La matematica da Pitagora a Newton*, Franco Muzzio Editore, Roma 2003.

⁵ L. Lombardo Radice, *L'educazione della mente*, Editori Riuniti, Roma 1965.